# ชุดการเรียนการสอน

## วิชาคณิตศาสตร์ ค40205
## เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
## ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6


**โดย**

**นายคำหล้า ลาภาอุตย์**

**ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการ**

**กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**

**โรงเรียนปทุมวิไล อำเภอเมือง จังหวัดปทุมธานี**

**สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาปทุมธานี เขต 1**

**สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ**

# คำนำ

ชุดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ค40205 เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จัดทำขึ้นเพื่อให้ครูนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ข้าพเจ้าได้ใช้ประสบการณ์ ศึกษาค้นคว้า รวบรวมเนื้อหาสาระ กิจกรรม สื่อการเรียนการสอน การวัดผลและการประเมินผล ตลอดจนหลักจิตวิทยาที่เกี่ยวข้อง เรียบเรียง ทดลองใช้และปรับปรุงแก้ไขมาตามลำดับ แบ่งเนื้อหาออกเป็น 2 หน่วย คือ

**หน่วยที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน**

**หน่วยที่ 2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน**

ในแต่ละหน่วยจะมีแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนมีการทบทวนสรุปบทเรียนและแบบฝึกหัดทบทวนพร้อมเฉลยเพื่อให้นักเรียนและครูได้ตรวจสอบความรู้ความเข้าใจในบทเรียน และเพื่อเป็นการเตรียมความพร้อมให้กับนักเรียนก่อนที่จะมีการทดสอบหลังเรียน ตลอดจนครูมีเอกสารสำหรับสอนซ่อมเสริม เอกสารเสริมประสบการณ์ เอกสารสำหรับอ่านเพิ่มเติมและเสริมความรู้สำหรับนักเรียนที่สนใจเป็นพิเศษ

ผู้จัดทำหวังว่าชุดการเรียนการสอนนี้ จะช่วยพัฒนาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ค40205 เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ให้ก้าวหน้าต่อไป

นายคำหล้า ลาภาอุตย์

ครูชำนาญการ โรงเรียนปทุมวิไล

# สารบัญ

# คำชี้แจง

ชุดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ค 40205 เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จัดทำขึ้นเพื่อให้ครูใช้ประกอบการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพ สอดคล้องตามพระราชบัญญัติ การศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 แก้ไขเพิ่มเติมฉบับที่ 2 พ.ศ. 2544 มาตรา 22 การจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด มาตรา 23 การจัดการศึกษาต้องเน้นความสำคัญทั้งความรู้ คุณธรรม กระบวนการเรียนรู้และ บูรณาการตามความเหมาะสม และมาตรา 24 จัดเนื้อหาสาระและกิจกรรมให้สอดคล้องกับความสนใจและความถนัดโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล

ชุดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ค40205 เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันนี้ จัดทำเป็น 2 หน่วย ได้แก่

**หน่วยที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน**

**หน่วยที่ 2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน**

ในแต่ละหน่วยจะประกอบไปด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ ที่ประกอบด้วยสาระสำคัญ จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหากิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอน ที่เป็นสื่อวัสดุทั้งวัสดุสิ่งพิมพ์ และวัสดุประดิษฐ์ การวัดผลและการประเมินผล และบันทึกหลังสอนที่ได้จากการสังเกต สัมภาษณ์ สอบถาม ในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ซึ่งมีส่วนสำคัญมากต่อการให้ความช่วยเหลือ/แก้ไข/พัฒนานักเรียนเป็นรายบุคคล ตามศักยภาพ

## ชุดการเรียนการสอน

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **ทดสอบ ก่อนเรียน** | **หน่วยที่ 1** | **ทดสอบ ย่อย** | **หน่วยที่ 2** | **ทดสอบ หลังเรียน** |
| **แผนการ สอน** | **สื่อการเรียน การสอน สื่อวัสดุ สิ่งพิมพ์หรือ ประดิษฐ์** | **เอกสาร ฝึกหัด** | **เอกสาร แบบฝึกหัด เพิ่มเติม** | **เอกสาร ซ่อมเสริม** |

สำหรับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เนื้อหาส่วนใหญ่เป็นนามธรรม ชุดการเรียนการสอนนี้จึงใช้สื่อการเรียนการสอนที่ส่วนใหญ่เป็นสื่อวัสดุที่เป็นวัสดุสิ่งพิมพ์ และวัสดุประดิษฐ์ ดังนี้

สื่อวัสดุที่เป็นวัสดุสิ่งพิมพ์ ประกอบด้วยเอกสารต่าง ๆ ดังนี้

1. เอกสารซ่อมเสริมเสริมประสบการณ์ ชุดที่ 1, 2, 3 สำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อน ปานกลาง และเก่งตามลำดับ
2. เอกสารซ่อมเสริมทบทวนความรู้พื้นฐาน
3. เอกสารซ่อมเสริมทบทวนบทเรียน
4. เอกสารอ่านเพิ่มเติมเสริมความรู้
5. ใบความรู้ (แจกให้นักเรียนไปศึกษาเพิ่มเติมนอกเวลาเรียน)
6. ใบกิจกรรมประกอบบทเรียน
7. เอกสารฝึกหัด
8. เอกสารแบบฝึกหัดเพิ่มเติม
9. เอกสารเสริมทักษะ

เอกสารต่าง ๆ ดังกล่าวข้างต้น จัดทำขึ้น เพื่อคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลและเพื่อให้นักเรียนได้พัฒนาตนเอง เต็มตามศักยภาพถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด ตรงตามมาตรา 22 และมาตรา 24 ในพระราชบัญญัติการศึกษา พ.ศ.2542 แก้ไขเพิ่มเติมฉบับที่ 2 พ.ศ. 2544

ส่วนสื่อวัสดุที่เป็นวัสดุประดิษฐ์ ได้แก่

1. แผ่นโปร่งใส
2. แผ่นโปร่งใสซ้อน

ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน จัดกิจกรรมอย่างหลากหลายตรงกับความถนัดและความสนใจของผู้เรียน มีทั้งการศึกษาด้วยตนเองการทำกิจกรรมเดี่ยว กิจกรรมกลุ่ม การลงมือปฏิบัติ การแข่งขันเกม การอภิปราย การออกมาทำบนกระดาน การเสนอผลงาน การเสนอแนวคิด การนำไปประยุกต์ใช้ เป็นต้น

สำหรับลำดับขั้นตอนในการจัดการเรียนการสอน เป็นดังนี้

1. ทบทวนความรู้เดิมเพื่อนำไปสู่ความรู้ใหม่ หรือเพิ่มเติมด้วยการเล่าประวัติบอกความสำคัญและความเป็นมา และให้แนวคิดในความรู้ใหม่ ๆ
2. หากลวิธีให้นักเรียนหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง อาจจะเป็นกิจกรรมเดี่ยวหรือกิจกรรมกลุ่มแล้วแต่ลักษณะเนื้อหา
3. ให้นักเรียนฝึกฝนเพื่อให้เกิดทักษะทั้งในชั้นเรียนและนอกชั้นเรียนทำเป็นการบ้าน

4. ให้นักเรียนนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้และพัฒนาต่อๆ ไป

ส่วนการวัดผลและการประเมินผล จัดทำหลายรูปแบบ จัดทำอย่างต่อเนื่องประจำสม่ำเสมอ จัดทำทั้งเพื่อการแก้ไข/ปรับปรุง/พัฒนา และจัดทำเพื่อการประเมินผล เช่น ศึกษาจาก ข้อมูลพื้นฐานที่เป็นสารสนเทศของนักเรียนเป็นรายบุคคลเพื่อดูพัฒนาการของนักเรียน สังเกต พฤติกรรม การสัมภาษณ์ การอภิปราย การประเมินตนเอง เพื่อนประเมิน การนำเสนอแนวคิด การนำไปประยุกต์ใช้ การตรวจผลงาน การร่วมกิจกรรม และการทดสอบซึ่งตรงตามมาตรา 26 ในพระราชบัญญัติการศึกษา พ.ศ. 2542 แก้ไขเพิ่มเติมฉบับที่ 2 พ.ศ. 2544

นอกจากนี้ผู้จัดทำได้รวบรวมทั้งส่วนที่เป็นเนื้อหา สูตร กฎ บทนิยาม ทฤษฎีบท แบบฝึกหัดและแบบฝึกหัดเพิ่มเติมที่ครูสร้างขึ้น นำมาจัดเรียบเรียงเป็นเอกสารประกอบการสอนให้นักเรียนเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนในชั้นเรียน ใช้ศึกษาล่วงหน้าใช้ศึกษาทบทวนใช้ซ่อมเสริมเมื่อนักเรียนไม่ได้มาเรียน เพื่อคำนึงถึงประโยชน์สูงสุดต่อนักเรียน

# คำแนะนำการใช้ชุดการเรียนการสอน

**คำแนะนำการใช้สำหรับผู้สอน**

การใช้ชุดการเรียนการสอนนี้ ครูควรเตรียมตัวและปฏิบัติกิจกรรมดังต่อไปนี้

**1. การเตรียมสื่อการเรียนการสอน**

1.1 แผ่นโปร่งใส

1.2 แผ่นโปร่งใสซ้อน

1.3 ใบกิจกรรมประกอบการเรียน

1.4 ใบความรู้ **(แจกให้นักเรียนไปศึกษาเพิ่มเติมนอกเวลาเรียน)**

1.5 เอกสารฝึกหัด

1.6 เอกสารแบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1.7 เอกสารซ่อมเสริมประสบการณ์ ชุดที่ 1, 2, 3

1.8 เอกสารซ่อมเสริมทบทวนบทเรียน

1.9 เอกสารอ่านเพิ่มเติมเสริมความรู้

1.10 ชุดการเรียนการสอน

1.11 เอกสารเสริมทักษะ

**2. การบริหารจัดการชั้นเรียน**

การบริหารจัดการชั้นเรียน ควรจัดนักเรียนให้เหมาะสมกับเหตุการณ์หรือการจัดกิจกรรม เช่น เดี่ยว กลุ่มย่อย กลุ่มใหญ่ เป็นคู่ เป็นต้น

**3. การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน**

3.1 **ทดสอบก่อนเรียน**

ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อดูความรู้พื้นฐานในเรื่องที่จะเรียน จะได้จัดกิจกรรมได้เหมาะสมกับศักยภาพ

3.2 **นำเข้าสู่บทเรียน**

สร้างความสนใจ ทบทวนความรู้เดิม เล่าประวัติ บอกความสำคัญ และแนวคิด

3.3 **ดำเนินการสอน**

ดำเนินการสอนด้วยกิจกรรมหลากหลาย เช่น

- นักเรียนตอบคำถาม
- นักเรียนฟังคำอธิบาย
- นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง
- นักเรียนทำแบบฝึกหัด
- นักเรียนทำกิจกรรมทั้งเดี่ยวและกลุ่ม
- นักเรียนศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม
- นักเรียนสร้างโจทย์
- นักเรียนสรุปบทเรียน

3.4 **สรุป**

นักเรียนช่วยกันสรุป หรือครูใช้วิธีการสรุปโดยใช้การถามตอบหรือใช้แผ่นโปร่งใส

3.5 **การวัดผลและการประเมินผล**

- ครูสังเกต
- ครูประเมินนักเรียน
- นักเรียนประเมินตนเอง
- เพื่อนประเมิน
- การทำกิจกรรม
- การทำการบ้าน
- การนำเสนอผลงาน
- การทำแบบทดสอบ

3.6 **การซ่อมเสริม**

- การซ่อมเสริมเมื่อขาดเรียน
- การซ่อมเสริมเมื่อไม่เข้าใจบทเรียน
- การซ่อมเสริมเมื่อพื้นฐานที่นำมาใช้ไม่ดี
- การซ่อมเสริมเมื่อเข้าใจดีแล้ว แต่ต้องการพัฒนายิ่งขึ้น

# คำแนะนำการใช้สำหรับผู้เรียน

การใช้ชุดการเรียนการสอนนี้ ส่วนใหญ่ครู/นักเรียน จะเป็นผู้เสนอกิจกรรมและนักเรียนเป็นผู้ดำเนินกิจกรรม จึงสรุปได้ดังนี้

1. นำเอกสารประกอบการเรียนการสอนที่แจกให้มาใช้ในการเรียนทุกครั้ง
2. ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมต่าง ๆ ทั้งกลุ่มและเดี่ยว ด้วยความสนใจ และเอาใจใส่
3. เข้าเรียนเป็นประจำสม่ำเสมอ ไม่ขาดเรียน ถ้ามีเหตุสุดวิสัยต้องขาดเรียน ให้ซ่อมเสริมด้วยการศึกษาเอกสารประกอบการสอนหรือติดตามบทเรียนกับเพื่อน หรือกับครูผู้สอน
4. ทำแบบฝึกหัดทั้งในชั้นเรียนและการบ้านให้ครบทุกข้อ
5. เมื่อมีปัญหาใด ๆ ให้ขอคำปรึกษา แนะนำจากครูผู้สอน

# ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

# หน่วยที่ 1

# ลิมิตของฟังก์ชัน

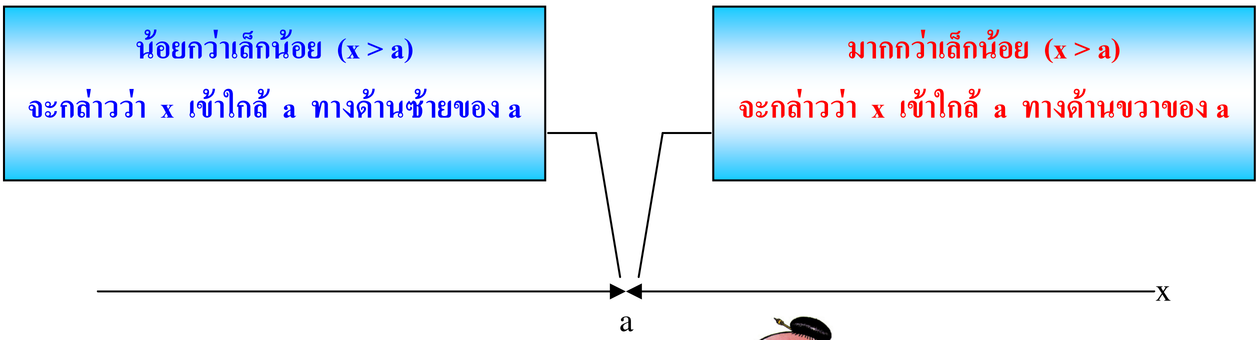
# ลิมิตของฟังก์ชัน

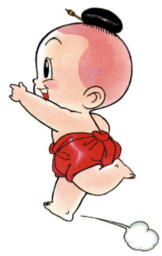
ในเรื่องลำดับและอนุกรมได้กล่าวไว้ว่าลำดับที่นำมาพิจารณา**ลิมิต**นั้นจะต้องเป็น **ลำดับอนันต์ (Infinite sequence)** เท่านั้น

แต่สำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ขณะที่ $x$ เข้าใกล้จำนวนจริงใด ๆ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

เรามาสนใจความหมายของการที่ $x$ เข้าใกล้จำนวนจริงจำนวนใดจำนวนหนึ่ง

การที่ $x$ เข้าใกล้จำนวนจริงจำนวนใดจำนวนหนึ่ง อาจเข้าใกล้ แบบน้อยกว่าเล็กน้อย $(x < a)$ หรือมากกว่าเล็กน้อย $(x > a)$ ดังรูป



1. เมื่อ **$x$ เข้าใกล้ $a$ โดยที่ $x < a$** จะกล่าวว่า **$x$ เข้าใกล้ $a$ ทางด้านซ้าย**

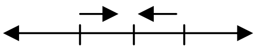
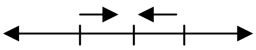
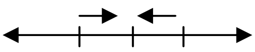
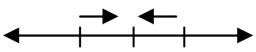
   เขียนแทนได้ด้วย**สัญลักษณ์ $x \to a^-$**

2. เมื่อ **$x$ เข้าใกล้ $a$ โดยที่ $x > a$** จะกล่าวว่า **$x$ เข้าใกล้ $a$ ทางด้านขวา**

   เขียนแทนได้ด้วย**สัญลักษณ์ $x \to a^+$**

## กิจกรรมช่วยกันคิด

**ให้นักเรียนพิจารณาความหมายของ x  เข้าใกล้จำนวนจริง a ใด ๆ บนเส้นจำนวน**

| ข้อที่ | เส้นจำนวน | a | x<a แล้วเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ | x>a แล้วลดลงเรื่อย ๆ |
|---|---|---|---|---|
| 1 |  1 2 3 | 2 | ...,1,1.5,1.9,1.99,1.999,1.9999,... | ...,3,2.5,2.1,2.01,2.001,2.0001,... |
| 2 |  3 4 5 | 4 | | |
| 3 |  5 6 7 | 6 | | |
| 4 |  7 8 9 | 8 | | |

จากตารางข้างต้นดังกล่าว

ถ้า a เข้าใกล้ 2 โดยที่ a < 2 แล้วเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เขียนแทนด้วย $x \to 2^-$
ถ้า a เข้าใกล้ 4 โดยที่ a < 4 แล้วเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เขียนแทนด้วย___________
ถ้า a เข้าใกล้ 6 โดยที่ a < 6 แล้วเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เขียนแทนด้วย___________
ถ้า a เข้าใกล้ 8 โดยที่ a < 8 แล้วเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เขียนแทนด้วย___________

ถ้า a เข้าใกล้ 2 โดยที่ a > 2 แล้วลดลงเรื่อย ๆ เขียนแทนด้วย $x \to 2^+$
ถ้า a เข้าใกล้ 4 โดยที่ a > 4 แล้วลดลงเรื่อย ๆ เขียนแทนด้วย ____________
ถ้า a เข้าใกล้ 6 โดยที่ a > 6 แล้วลดลงเรื่อย ๆ เขียนแทนด้วย ____________
ถ้า a เข้าใกล้ 8 โดยที่ a > 8 แล้วลดลงเรื่อย ๆ เขียนแทนด้วย ____________

โดยทั่วไปแล้วในการพิจารณาเมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริงใด ๆ จะพิจารณา 2 กรณี คือ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย ซึ่ง $x < a$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^-$ และ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา ซึ่ง $x > a$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^+$

สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง

1. ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย ($x \longrightarrow a^-$) แล้วค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง $L_1$ (เรียก $L_1$ ว่าลิมิตทางซ้ายของ f ที่ a) สามารถเขียนแทนได้ด้วย

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

2. ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านขวา ($x \longrightarrow a^+$) แล้วค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง $L_2$ (เรียก $L_2$ ว่าลิมิตทางขวาของ f ที่ a) สามารถเขียนแทนได้ด้วย

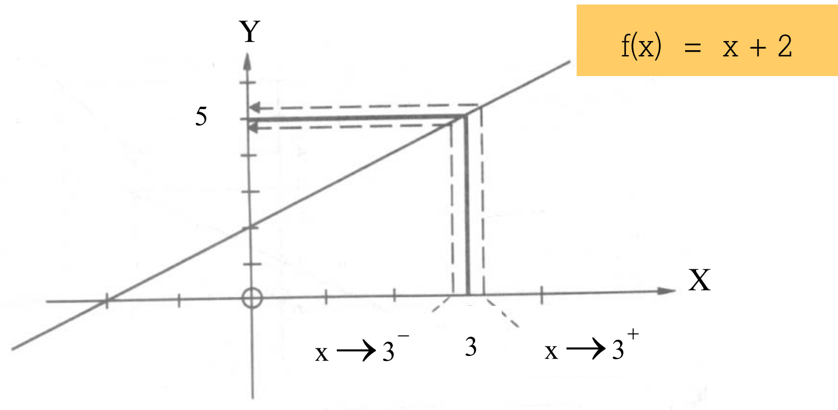
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

3. เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ไม่ว่าจะทางด้านซ้ายหรือขวา แล้วค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง L สามารถเขียนแทนได้ด้วย

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ถ้า $L_1 = L_2 = L$ แสดงว่าฟังก์ชัน f มีลิมิตสองด้าน และเรียกลิมิตสองด้านนี้ว่า **ลิมิตฟังก์ชัน f** เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a} f(x) = L$

**พิจารณากราฟของฟังก์ชัน f(x) = x + 2**




จากกราฟจะได้ว่า

1. เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางด้านซ้าย ($x \to 3^-$) แล้ว ค่าของ f(x) เข้าใกล้ 5

**สามารถเขียนแทนได้ด้วย**

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

2. เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางด้านขวา ($x \to 3$) แล้ว ค่าของ f(x) เข้าใกล้ 5

**สามารถเขียนแทนได้ด้วย**

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$$

3. เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ไม่ว่าจะทางด้านซ้ายหรือด้านขวา แล้ว ค่าของ f(x) เข้าใกล้ 4

**สามารถเขียนแทนได้ด้วย**

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

**ข้อสังเกต**

1. ถ้า $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x) = L$

2. ถ้า $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ a

# แบบฝึกหัด 1

(1) ให้นักเรียนพิจารณา $f(x) = x+2$ เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ 4 เป็นดังนี้

$x$ เข้าใกล้ 4 ทางด้านซ้าย

| x | f(x)=x+2 |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| 3 | ____________ |
| 3.5 | ____________ |
| 3.9 | ____________ |
| 3.99 | ____________ |
| 3.999 | ____________ |
| 3.9999 | ____________ |
| ⋮ | ⋮ |

$x$ เข้าใกล้ 4 ทางด้านขวา

| X | f(x)=x+2 |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| 5 | ____________ |
| 4.5 | ____________ |
| 4.1 | ____________ |
| 4.01 | ____________ |
| 4.001 | ____________ |
| 4.0001 | ____________ |
| ⋮ | ⋮ |

นำมาเขียนกราฟ จะได้ดังนี้

จากกราฟและตาราง พบว่า

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) =$ ______________________

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) =$ ______________________

ปรากฏว่า ___________=_______________________

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$ ______________________

(2) ให้นักเรียนพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 เป็นดังนี้

x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย

| x | f(x)=x+2 |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| 1 | ______________ |
| 1.9 | ______________ |
| 1.99 | ______________ |
| 1.999 | ______________ |
| 1.9999 | ______________ |
| ⋮ | ⋮ |

x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา

| X | f(x)=x+2 |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| 3 | ______________ |
| 2.1 | ______________ |
| 2.01 | ______________ |
| 2.001 | ______________ |
| 2.0001 | ______________ |
| ⋮ | ⋮ |

นำมาเขียนกราฟ จะได้ดังนี้

จากตารางและกราฟ พบว่า

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

ปรากฏว่า ___________=______________________

ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

ดังนั้น จะได้ว่าลิมิตสองด้านของ f(x) ไม่มีลิมิต เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

(3) ให้นักเรียนพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{เมื่อ } x \leq 6 \\ x+4 & \text{เมื่อ } x > 6 \end{cases}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 6 เป็นดังนี้

x เข้าใกล้ 6 ทางด้านซ้าย

| x | f(x)=x-2 |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| 5 | ____________ |
| 5.9 | ____________ |
| 5.99 | ____________ |
| 5.999 | ____________ |
| 5.9999 | ____________ |
| ⋮ | ⋮ |

x เข้าใกล้ 6 ทางด้านขวา

| X | f(x)=x+4 |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| 7 | ____________ |
| 6.1 | ____________ |
| 6.01 | ____________ |
| 6.001 | ____________ |
| 6.0001 | ____________ |
| ⋮ | ⋮ |

นำมาเขียนกราฟ จะได้ดังนี้

จากตารางและกราฟ พบว่า

$\lim_{x\to 6^-} f(x) =$ ______________________

$\lim_{x\to 6^+} f(x) =$ ______________________

ปรากฏว่า ___________ $\neq$ _____________________

ดังนั้น $\lim_{x\to 6} f(x) =$ ______________________

## แบบฝึกหัดเพิ่มเติม ชุดที่ 1

1. ถ้า $f(x) = x+5$ จงหา $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ และ $\lim_{x\to 2} f(x)$ โดยเขียนตารางหรือกราฟ

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

2. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ x-3, & x > 1 \end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ โดยเขียนตารางหรือกราฟ

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

3. ถ้า $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ โดยการเขียนตารางหรือกราฟ

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

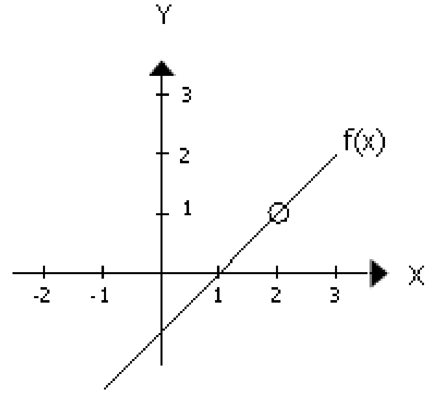
____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

# แบบทดสอบย่อย ชุดที่ 1

.1. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ จากกราฟ



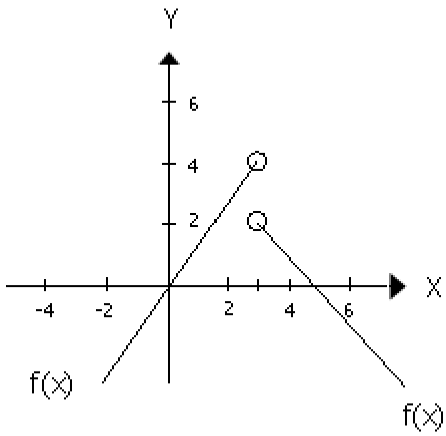

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

2. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ จากกราฟ




________________________________________________________________

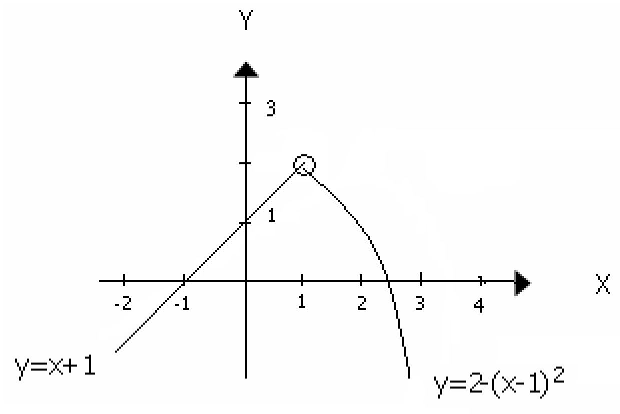
________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

3. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} f(x)$ จากกราฟ



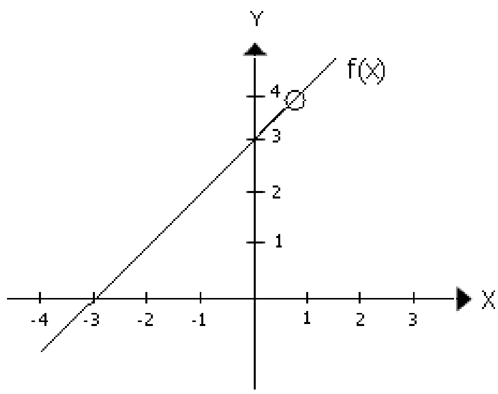

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

4. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ จากกราฟ




________________________________________________________________

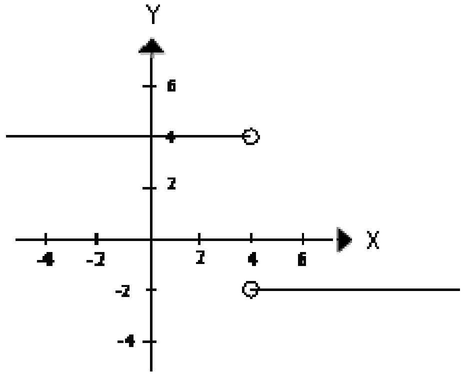
________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

5. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ จากกราฟ




---

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

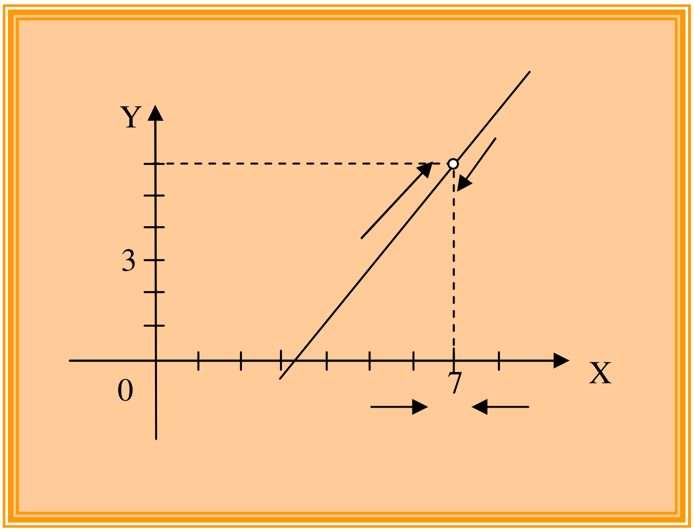
_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

**การหาลิมิตของฟังก์ชันบางฟังก์ชันโดยพิจารณาลิมิตซ้ายและลิมิตขวา**

**ตัวอย่างที่ 1** ถ้า f(x) = x-4 จงหา $\lim\limits_{x\to 7^-}(x-4)$, $\lim\limits_{x\to 7^+}(x-4)$ และ $\lim\limits_{x\to 7}(x-4)$

**วิธีทำ** เขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะได้ดังนี้




จากกราฟจะได้

$\lim\limits_{x\to 7^-}(x-4) = 7-4 = 3$

$\lim\limits_{x\to 7^+}(x-4) = 7-4 = 3$

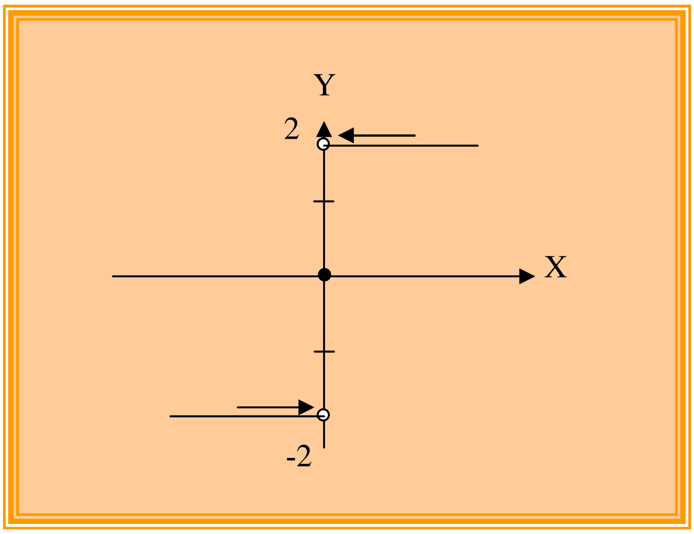
$\lim\limits_{x\to 7}(x-4) = \lim\limits_{x\to 7^-}(x-4) = \lim\limits_{x\to 7^+}(x-4) = 3$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$ หรือ f(x) เป็นฟังก์ชันมีลิมิตที่ x=7

**ตัวอย่างที่ 2** ถ้า $f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$

จงเขียนกราฟและ หา $\lim_{x \to 0} f(x)$

**วิธีทำ** เขียนกราฟได้ดังนี้




จากกราฟจะได้

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$

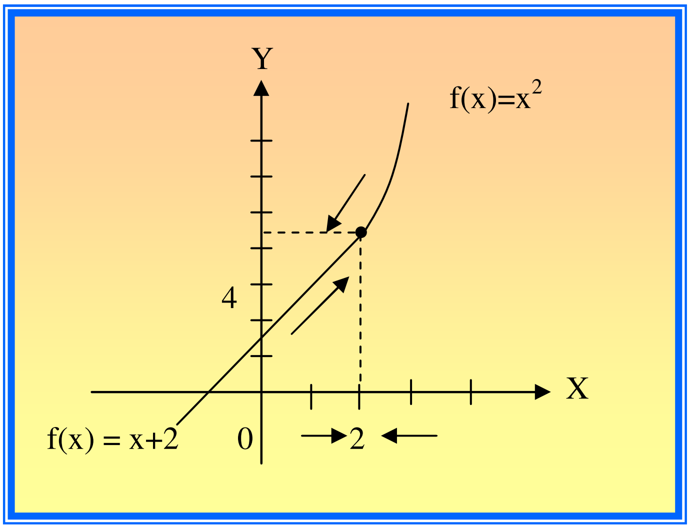
ปรากฏว่า $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0} f(x)$ **หาค่าไม่ได้ หรือ f(x) เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีลิมิต**

**ตัวอย่างที่ 3** ถ้า $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ x+2 & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ และ $\lim_{x\to 2} f(x)$

**วิธีทำ** เขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ได้ดังนี้




จากกราฟจะได้

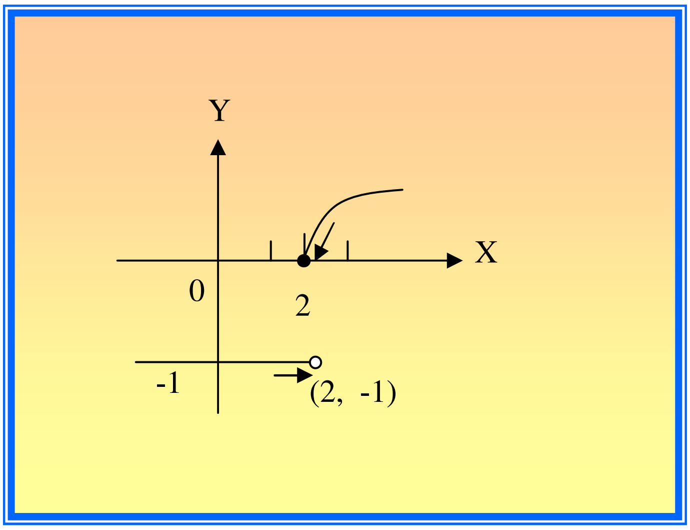
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 2+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0} f(x)$ = **4 หรือ f(x) เป็นฟังก์ชันมีลิมิต ที่ x = 2**

**ตัวอย่างที่ 4** จากกราฟข้างล่างนี้ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีลิมิตที่ 2 หรือไม่




**วิธีทำ** จากกราฟจะได้

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

ดังนั้น f(x) **เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีลิมิตที่ 2**

**ตัวอย่างที่ 5** ถ้า $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x \geq 3 \\ x-5 & \text{เมื่อ } x < 3 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f(x) มีลิมิตที่ x = 3 หรือไม่

**วิธีทำ**

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to^-} (x-5) = 3-5 = -2$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x) = 2(3) = 6$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

ดังนั้น $f(x)$ **เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีลิมิตที่ x = 3**

**ตัวอย่างที่ 6** ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x \to 1^-} f(x), \ \lim_{x \to 1^+} f(x), \ \lim_{x \to 1} f(x)$

**วิธีทำ**

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ หรือ **f(x) เป็นฟังก์ชันมีลิมิตที่ x = 1**

# แบบฝึกหัดที่ 2

1. ถ้า $f(x) = 2x - 1$ จงเขียนกราฟและหา $\lim_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim_{x \to 5^+} f(x)$, $\lim_{x \to 5} f(x)$

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

2. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$ จงเขียนกราฟและหา

$\lim_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2} f(x)$

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

3. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 3x, & x \geq 3 \\ x+3, & x < 3 \end{cases}$ จงเขียนกราฟและหา

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

4. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \geq 1 \\ 2+5x, & x < 1 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

5. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x - 8, & x = 8 \\ x + 8, & x \neq 8 \end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x \to 8^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 8^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 8} f(x)$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

## การหาลิมิตของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

**ตัวอย่างที่ 7** ถ้า $f(x) = |x^2 - 9|$ จงหา

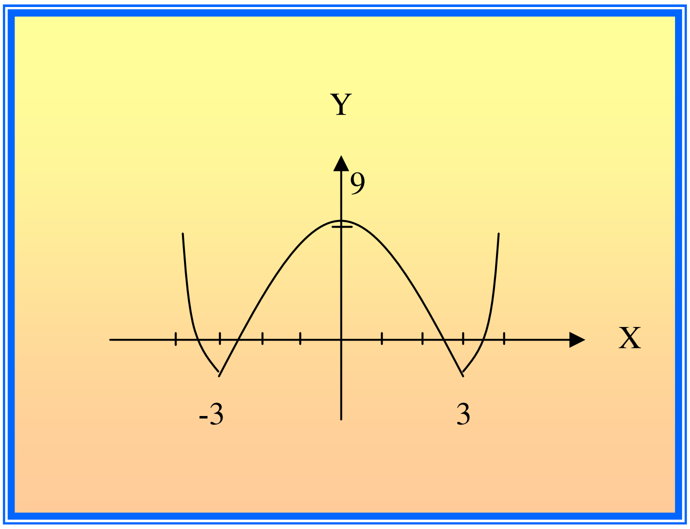
$\lim_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim_{x \to 3^+} f(x)$, $\lim_{x \to 3} f(x)$

**วิธีทำ** จาก $f(x) = |x^2 - 9|$

จะได้

$$|x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{เมื่อ } x^2 - 9 \geq 0 \text{ นั่นคือ } x \geq 3 \text{ หรือ } x \leq -3 \\ -(x^2 - 9) & \text{เมื่อ } x^2 - 9 < 0 \text{ นั่นคือ } -3 < x < 3 \end{cases}$$

เขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้




ดังนั้น (1) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -(3^2 - 9) = 0$

(2) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = (3^2 - 9) = 0$

(3) $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$

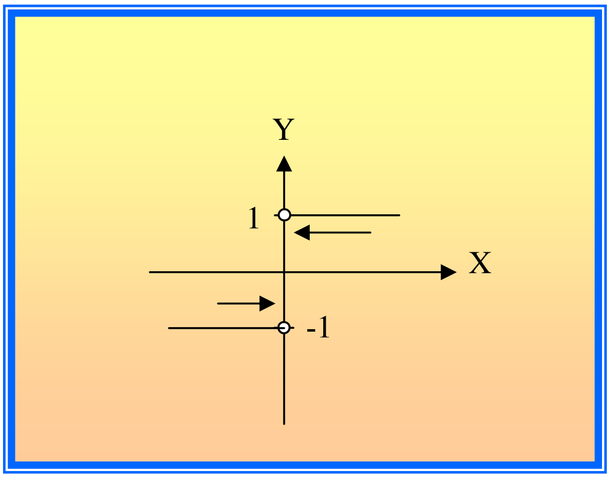
**ตัวอย่างที่ 8** ถ้า $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จงหา $\lim_{x \to 0^-} f(x), \ \lim_{x \to 0^+} f(x), \ \lim_{x \to 0} f(x)$

**วิธีทำ** จาก $f(x) = \frac{|x|}{x}$

จะได้ $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{เมื่อ} \quad x > 0 \\ -\frac{x}{x} & \text{เมื่อ} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad x > 0 \\ -1 & \text{เมื่อ} \quad x < 0 \end{cases}$$

เขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้




ดังนั้น $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ ไม่มีลิมิต

นั่นคือ f(x) ไม่มีลิมิต

f(x) เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีลิมิต ที่ x = 0

# แบบฝึกหัดที่ 3

1. ถ้า $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ จงหา $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2} f(x)$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

2. ถ้า $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$ จงหา $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1} f(x)$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

3. ถ้า $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ จงหา $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2} f(x)$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

4. ถ้า $f(x) = \dfrac{3|x-5|}{x-5}$ จงหา $\lim_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim_{x \to 5^+} f(x)$, $\lim_{x \to 5} f(x)$

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

5. ถ้า $f(x) = \dfrac{4|x-7|}{14-2x}$ จงหา $\lim_{x \to 7} f(x)$

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

# แบบฝึกหัดเพิ่มเติม ชุดที่ 2

1. ถ้า $f(x) = x - 2$ จงหา $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

2. ถ้า $f(x) = |x - 4|$ จงหา $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

3. ถ้า $f(x) = \dfrac{3|x - 1|}{x - 1}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

4. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x + 1 , & x \leq 2 \\ 2 , & x \geq 2 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

5. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \geq 1 \\ 2 + x, & x < 1 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

6. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2}, & -3 < x < 3 \\ 3 - x, & x > 3 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

7. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -1, & x = 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

8. ถ้า $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<3 \\ 10-x, & x\geq 3 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

9. ถ้า $f(a)=\begin{cases} 2a+3, & a<1 \\ 2, & a=1 \\ 7-2a, & a>1 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{a\to 1} f(a)$

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

10. ถ้า $f(x)=\begin{cases} 2, & x<-2 \\ \sqrt{4-x^2}, & -2<x<2 \\ -2, & x>2 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

________________________________________________________________

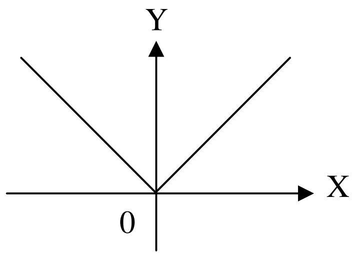
________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

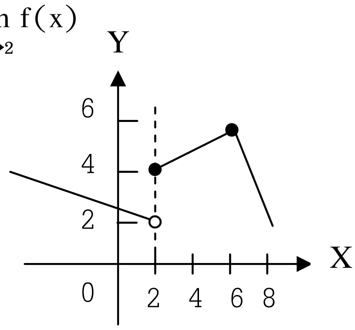
11. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \neq 4 \\ 8, & x = 4 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

12. จากกราฟของฟังก์ชัน f จงหา $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

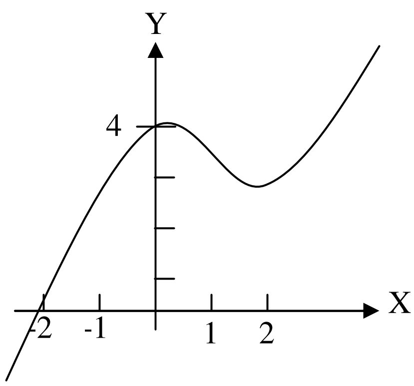



13. จากกราฟของฟังก์ชัน f จงหา $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 6^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$

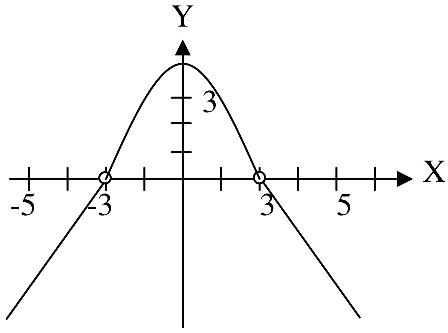



14. จากกราฟของฟังก์ชัน f จงหา $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$



15. จากกราฟของฟังก์ชัน f จงหา

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$,



# แบบทดสอบย่อย ชุดที่ 2

1. จงหาค่า $\lim_{x \to -4^{+}} \sqrt{5 - x}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

2. จงหาค่า $\lim_{x \to 3^{-}} x + 3 + \lim_{x \to 3^{+}} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

3. จงหาค่า $\lim_{x \to 2^{-}} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 , & x \geq 2 \\ 4 - x , & x < 2 \end{cases}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

4. จงหาค่า $\lim_{x\to 5^+} f(x) - \lim_{x\to 5^-} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-5}\ , x\geq 5 \\ \dfrac{x^2-25}{x+5}\ , x<5 \end{cases}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

5. จงหาค่า $\lim_{x\to 1^-} f(x) + \lim_{x\to 1^+} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1}\ , x>1 \\ \dfrac{1-x}{|1-x|}\ , x<1 \end{cases}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

## ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

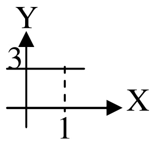
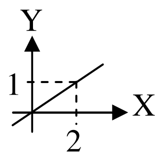
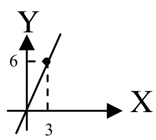
จากที่กล่าวมาเราหาลิมิตของฟังก์ชัน โดยอาศัยการคำนวณค่าของฟังก์ชันหรือการเขียนกราฟของฟังก์ชัน ต่อไปนี้เราจะมากล่าวถึงทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน โดยไม่แสดงการพิสูจน์ และจะใช้ทฤษฎีบทเหล่านี้ช่วยในการหาลิมิตของฟังก์ชัน

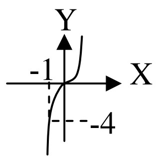
**ทฤษฎีบท** เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n, \quad n \in I^+$
4. $\lim\limits_{x\to a} c\, f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x) = cL,$ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
5. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$
6. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) - g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$
7. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \cdot M$
8. $\lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}, \; M \neq 0$
9. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n, \; n \in I^+$
10. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \; n \in I^+ - \{1\}$ และ $\sqrt[n]{L} \in R$

# กิจกรรมลองทำดู

ให้นักเรียนหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่างๆ ดังนี้

| ข้อที่ | ฟังก์ชัน | กราฟ | ค่าลิมิตของฟังก์ชัน |
|---|---|---|---|
| 1 | $f=\{(x,y)\mid y=3\}$ |   | $\lim_{x\to 1} 3 = 3$ |
| 2 | $f=\{(x,y)\mid y=-4\}$ | | $\lim_{x\to 0}(-4)$ =_______ |
| 3 | $f=\left\{(x,y)\mid y=\frac{1}{2}\right\}$ | | $\lim_{x\to -1}(\frac{1}{2})$ =_______ |
| 4 | $f=\{(x,y)\mid y=-0.25\}$ | | $\lim_{x\to 2}(-0.25)$ =______ |
| 5 | $f=\{(x,y)\mid y=x\}$ |   | $\lim_{x\to 2}(x)$ =2 |
| 6 | $f=\{(x,y)\mid y=-x\}$ | | $\lim_{x\to 4}(-x)$ =______ |
| 7 | $f=\{(x,y)\mid y=2x\}$ |   | $\lim_{x\to 3}(2x)$ =______ |

| ข้อที่ | ฟังก์ชัน | กราฟ | ค่าลิมิตของฟังก์ชัน |
|---|---|---|---|
| 8 | $f=\{(x,y)\mid y=-3x\}$ | | $\lim_{x\to-2}(3x)=$______<br>$=-3\lim_{x\to-2}(x)$ |
| 9 | $f=\{(x,y)\mid y=x^{2}\}$ | | $\lim_{x\to4}(x^{2})=$______ |
| 10 | $f=\{(x,y)\mid y=4x^{3}\}$ |   | $\lim_{x\to-1}(4x^{3})=$______<br>$=4\lim_{x\to-1}x^{3}$ |

จากตารางข้างต้น ครูให้นักเรียนพิจารณา **ลักษณะร่วม** สังเกตรูปทั่วไปนำไปสู่ **ข้อสรุป** ซึ่งจะสังเกตได้ว่าเป็นไปตามทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันที่นักเรียนได้ศึกษา

# แบบฝึกหัดที่ 4

ให้นักเรียนหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x \to 4} (-8) =$ ______________
2. $\lim\limits_{x \to 3} (4x) =$ ______________
3. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2) =$ _____________
4. $\lim\limits_{x \to -2} (-3x^5) =$ ___________
5. $\lim\limits_{x \to 5} (x + 2) = \lim\limits_{x \to 5} (x) + \lim\limits_{x \to 5} (2) =$ _____________
6. $\lim\limits_{x \to 7} (5 - 4x) = \lim\limits_{x \to 7} 5 - \lim\limits_{x \to 7} (4x) =$ ______________
7. $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 9x) =$ _____________
8. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^4 - 5) =$ _______________
9. $\lim\limits_{x \to -1} (2x^3 - 5x + 8) =$ ___________
10. $\lim\limits_{x \to 0} (x^4 + 3x^2 + x - 6) =$ _________

## การหาลิมิตโดยใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต

**ตัวอย่างที่ 1** ถ้า $f(x) = x^2 - 3$ จงหา $\lim_{x\to 2} f(x)$

**วิธีทำ** $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 3$ (ทฤษฎีบท 6)

$= 2^2 - 3 = 1$ (ทฤษฎีบท 1, 3)

**ตัวอย่างที่ 2** ถ้า $f(x) = (x+2)^2$ จงหา $\lim_{x\to 5} f(x)$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $\lim_{x\to 5}(x+2) = \lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 2$ (ทฤษฎีบท 6)

$= 5 + 2$

$= 7$ (ทฤษฎีบท 1-2)

ดังนั้น $\lim_{x\to 5}(x+2)^2 = [\lim_{x\to 5}(x+2)]^2$ (ทฤษฎีบท 9)

$= 7^2$

$= 49$

**ตัวอย่างที่ 3** ถ้า $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 2x}$ จงหา $\lim_{x\to 5} f(x)$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $\lim_{x\to 5}(2x^3 - 2x) = 2(5^3) - 2(5)$ (ทฤษฎีบท 2-4, 6)

$= 250 - 10 = 240$

ดังนั้น $\lim_{x\to 5} f(x) = \sqrt[3]{\lim_{x\to 5}(2x^3 - 2x)}$ (ทฤษฎีบท 10)

$= \sqrt[3]{240} = 2\sqrt[3]{30}$

**ตัวอย่างที่ 4** ถ้า $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$ จงหา $\lim_{x \to -1} f(x)$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $\lim_{x \to -1} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2$ (ทฤษฎีบท 1, 3)

และ $\lim_{x \to -1} (3x - 2) = 3^{(-1)} - 2 = -5$ (ทฤษฎีบท 1, 2)

ดังนั้น $\lim_{x \to -1} f(x) = [\lim_{x \to -1} (x^2 + 1)][\lim_{x \to -1} (3x - 2)]$ (ทฤษฎีบท 7)

$= (2)(-5)$

$= -10$

**ตัวอย่างที่ 5** ถ้า $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 15}$ จงหา $\lim_{x \to 3} f(x)$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $\lim_{x \to 3} (x^2 - x - 6) = 3^2 - 3 - 6 = 0$ (ทฤษฎีบท 1-3)

และ $\lim_{x \to 3} (x^2 + 2x - 15) = 3^2 + 2(3) - 15 = 0$ (ทฤษฎีบท 1-4)

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{0}{0}$$

**ลิมิตของฟังก์ชันบางฟังก์ชันอาจจะหาค่าโดยวิธีปกติธรรมดาหรือใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิตไม่ได้ จะต้องเปลี่ยนรูปของฟังก์ชันใหม่ โดยอาศัยความรู้ทางพีชคณิต แยกตัวประกอบแล้วตัดทอน หรือคูณด้วยสังยุคของเศษหรือของส่วน ของฟังก์ชันที่กำหนดก่อนจึงหาลิมิต (ศึกษาวิธีการหาลิมิตของตัวอย่างที่ 5 ในหน้า 51)**

สำหรับตัวอย่างที่ 5 นี้จะ**ใช้การแยกตัวประกอบของเศษและส่วน** ดังนี้

จาก $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 15}$ เปลี่ยนรูปแบบใหม่จะได้

$$= \frac{(x-3)(x+2)}{(x+5)(x-3)} \quad \text{เมื่อ } x \neq 3$$

$$= \frac{x+2}{x+5}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}\left(\frac{x+2}{x+5}\right) \quad (\text{เมื่อ } x \neq 3)$$

$$= \frac{3+2}{3+5}$$

$$= \frac{5}{8}$$

**ตัวอย่างที่ 6** ถ้า $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

**วิธีทำ** จาก $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ เมื่อ $x \neq 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x+1)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

ตัวอย่างนี้ทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 5 ต้องเปลี่ยนรูปแบบฟังก์ชันใหม่โดยการแยกตัวประกอบที่ใช้ผลต่างกำลัง

**ตัวอย่างที่ 7** ถ้า $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

**วิธีทำ** จาก

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\times\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(x+2)-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} \qquad x\neq 0$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}},$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ตัวอย่างนี้ทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 5 กล่าวคือ ต้องเปลี่ยนรูปแบบของฟังก์ชันใหม่จะแยกตัวประกอบไม่ได้ จึงต้องใช้การนำสังยุคของเศษคูณทั้งเศษและส่วน

# แบบฝึกหัดที่ 5

1. ถ้า $f(x) = x^2 + 4x - 1$ จงหา $\lim_{x \to 3} f(x)$

2. ถ้า $f(x) = (2x - 5)^4$ จงหา $\lim_{x \to 2} f(x)$

3. ถ้า $f(x) = \sqrt[3]{x+22}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

4. ถ้า $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

5. ถ้า $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

6. ถ้า $f(x) = \dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$ จงหา $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

7. ถ้า $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

8. ถ้า $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

# แบบฝึกหัดเพิ่มเติม ชุดที่ 3

จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 1)$

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

2. $\lim_{x \to 3}(1 + \sqrt{x - 3})$

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

---------------------------------------------------------------

3. $\lim_{y \to 2} \frac{y^2 - 5}{2y^3 + 6}$

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

4. $\lim_{x \to -1} \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

5. $\lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

6. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

7. $\lim_{s \to 1} \frac{5^3 - 1}{5 - 1}$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

8. $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

9. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

10. $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

11. $\lim_{x \to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

12. $\lim_{x \to 2} \frac{y^3+8}{y+2}$

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

13. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^3+1}}$

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

__________________________________________________________

14. $\lim_{y \to -3} \sqrt{\frac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

15. $\lim_{k \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 - k}}{k}$

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

16. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{x}$

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{x+4}}-\sqrt{5}}{x}$

# แบบทดสอบย่อย ชุดที่ 3

1. จงหา $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

2. จงหา $\lim_{x \to 3} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ x+1, & x = 3 \end{cases}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

3. จงหา $\lim_{x \to 5} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{x^2-x-20}{x^2-25}$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

4. จงหา $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x > 2 \\ 2x, & x \leq 2 \end{cases}$

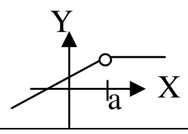
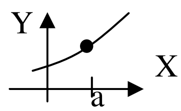
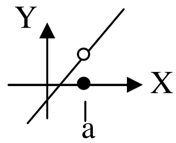
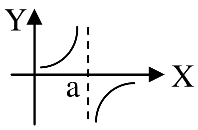
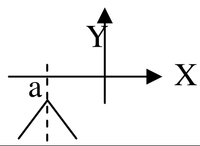
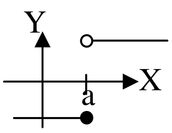
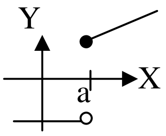
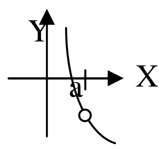
5. จงหา $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 1 \\ 1 - 2x, & x = 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$

# หน่วยที่ 2

# ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

## กิจกรรมระดมความคิด

ให้นักเรียนพิจารณากราฟของ f(x) พร้อมทั้งหา $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ และ f(a)

| ข้อที่ | กราฟ | $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ | f(a) | ความสัมพันธ์ระหว่าง $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ กับ f(a) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | เท่ากัน | ไม่เท่ากัน | สรุปไม่ได้ |
| 1 |  | หาค่าได้ | หาค่าไม่ได้ | | ✓ | |
| 2 |  | | | | | |
| 3 |  | | | | | |
| 4 |  | | | | | |
| 5 |  | | | | | |
| 6 |  | | | | | |
| 7 |  | | | | | |
| 8 |  | | | | | |

จากตารางข้างต้น จะพบว่า

(1) กราฟขาดตอนได้แก่ข้อที่

____________________________________________

(2) กราฟไม่ขาดตอนได้แก่ข้อที่

____________________________________________

(3) กราฟไม่ขาดตอนจะพบว่า

3.1 $\lim_{x \to a} f(x)$ ____________________________________________

หาค่าได้/หาค่าไม่ได้

3.2 f(a) ____________________________________________

หาค่าได้/หาค่าไม่ได้

3.3 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(4) กราฟขาดตอนจะพบว่า

4.1 $\lim_{x \to a} f(x)$ ____________________________________________

หาค่าได้/หาค่าไม่ได้

4.2 f(a) ____________________________________________

หาค่าได้/หาค่าไม่ได้

4.3 $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

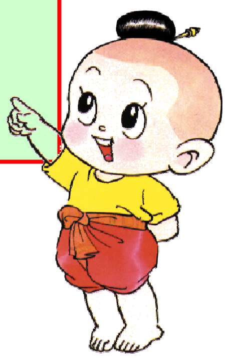
สังเกตเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันข้างต้นมีบางข้อเป็น **กราฟขาดตอนที่ x = a** ซึ่งในลักษณะเช่นนี้ จะ**เรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = a** และ **กราฟไม่ขาดตอนที่ x = a** ในลักษณะเช่นนี้**เรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a** ซึ่งมีบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องดังนี้

**บทนิยาม** ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x=a เมื่อฟังก์ชัน f มีสมบัติต่อไปนี้

(1) f(a) หาค่าได้

(2) $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้

และ (3) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$



**ตัวอย่างที่ 1** ถ้า f(x) = 2x-1 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x=2 หรือไม่

**วิธีทำ** จาก x=2 แสดงว่า a=2

(1) f(2) = 2(2)-1 = 3

(2) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x-1) = 2(2)-1 = 3$

(3) $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$

ดังนั้น **f(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่ x=2**

**ตัวอย่างที่ 2** ถ้า $f(x) = |x-2|$ จงพิจารณาว่า f(x) ต่อเนื่องที่ x=2 หรือไม่

**วิธีทำ** จาก x = 2 แสดงว่า a = 2

(1) $f(2) = |2-2| = |0| = 0$

(2) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} |x-2| = 0$

(3) $f(2) = \lim_{x \to 2} |x-2|$

ดังนั้น **f(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 2**

**ตัวอย่างที่ 3** ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ 5, & x < 3 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f(x) ต่อเนื่องที่ x=3 หรือไม่

**วิธีทำ** จาก x = 3 แสดงว่า a = 3

(1) $f(3) = 3^2 = 9$

(2) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3^2 = 9$

$\therefore$ $\lim_{x \to 3} f(x)$ ไม่มีลิมิต

ดังนั้น **f(x) เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = 3**

**ตัวอย่างที่ 4** ถ้า $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\neq 1 \\ 3, & x=1 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f(x) ต่อเนื่องที่ x = 1 หรือไม่ และต่อเนื่องที่ x = 5 หรือไม่

**วิธีทำ**

ที่ x = 1

(1) f(1) = 3

(2) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1-2=-1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1-2=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=-1$

(3) $f(1)\neq \lim_{x\to 1} f(x)$

$\therefore$ ดังนั้น **f(x) เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x =1**

ที่ x = 5

(1) f(5)= 5-2 = 3

(2) $\lim_{x\to 5^-} f(x)=5-2=3=\lim_{x\to 5^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 5} f(x)=3$

(3) $f(5)=\lim_{x\to 5} f(x)$

$\therefore$ ดังนั้น **f(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ X = 5**

**ตัวอย่างที่ 5** ถ้า $f(x)=\dfrac{x^2-8x+15}{x-5}$ จงพิจารณาว่า f(x) ต่อเนื่องที่ x = 5 หรือไม่

**วิธีทำ** จาก $f(x)=\dfrac{(x-5)(x-3)}{x-5}=x-3$ เมื่อ $x\neq 5$

$\therefore f(5)=\dfrac{5^2-8(5)+15}{5-5}$ **หาค่าไม่ได้**

ดังนั้น **f(x) เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = 5**

**ตัวอย่างที่ 6** ถ้า $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

**วิธีทำ** (1) $f(1) = 2$

(2) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$

(3) $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$\therefore$ ดังนั้น **f(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 1**

# แบบฝึกหัดที่ 6

จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่จุดกำหนดให้หรือไม่

1. $f(x) = 5x + 1$ เมื่อ $x = 2$

______________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

2. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$ เมื่อ $x = 3$

______________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

3. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ เมื่อ $x = 1$

______________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 5 \\ -2, & x > 5 \end{cases}$ เมื่อ x = 5

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

5. $f(x) = |x|$ เมื่อ x = 0

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

6. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$ เมื่อ x = -2

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

7. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \dfrac{x}{2} - 1, & x \ge 2 \end{cases}$ เมื่อ x = 2

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$

8.1 เมื่อ x = 3

_______________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

8.2 เมื่อ x = 4

_______________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

9. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<3 \\ 3, & 3 \le x < 5 \\ x-2, & x \ge 5 \end{cases}$

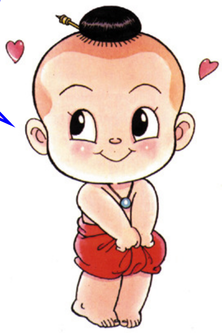
9.1 เมื่อ x = 3

9.2 เมื่อ x = 5

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x+4} & \text{เมื่อ } x \neq -4 \\ -8 & \text{เมื่อ } x = -4 \end{cases}$ เมื่อ x = -4

## บันทึกความรู้เพิ่มเติม

## เสริมประสบการณ์ชุดที่ 1
### **สำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อน**



1. ให้ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^{2}} & \text{เมื่อ } 0\le x<1\\ 1 & \text{เมื่อ } 1\le x<2\\ 2 & \text{เมื่อ } x=2\end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^{-}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^{+}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

2. จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^{2}}{3+x}$

3. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

4. จงหาค่าของ $\lim_{y \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 - y}}{y}$

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

5. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

6. ถ้า $f(x)=\begin{cases} x^2-25 & \text{เมื่อ } x \neq 5 \\ 25 & \text{เมื่อ } x=5 \end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

7. ถ้า $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2-3x-10}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด จึงจะทำให้ฟังก์ชัน g ไม่ต่อเนื่อง

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

8. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 5 - x & \text{เมื่อ } x < 4 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 4 \\ \frac{x}{4} & \text{เมื่อ } x > 4 \end{cases}$

จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ x=4

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

9. ถ้า $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ m & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ x =1 จงหาค่า m

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

10. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 1\cdot 9998 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2 & \text{เมื่อ } 0 \le x < 1 \\ 2x & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**เฉลยเสริมประสบการณ์ชุดที่ 1 สำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อน**

1) 0 , 1 , ไม่มี , 1 , 2 , ไม่มี

2) $\frac{25}{8}$

3) $\frac{1}{4}$

4) $\frac{1}{4}$

5) $\frac{1}{2}$

6) -21 , -21 , 0 , 0 , 0

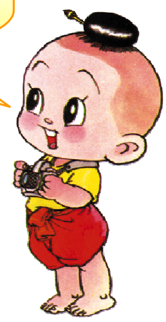
7) -2 , 5

8) –

9) 2

10) ไม่มีลิมิต

## เสริมประสบการณ์ชุดที่ 2
**สำหรับนักเรียนที่เรียนปานกลาง**



1. ให้ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{เมื่อ } 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } 2 \le x < 4 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 4 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2} f(x)$, $\lim_{x \to 3} f(x)$

2. จงหาค่า $\lim_{x \to 6} \frac{2x}{x+3}$

3. จงหาค่าของ $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2 - 4x - 5}$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

4. จงหาค่าของ $\lim_{y \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

5. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

6. ถ้า $f(x)=\begin{cases} x^2-9 & \text{เมื่อ } x\neq 3 \\ 9 & \text{เมื่อ } x=3 \end{cases}$

ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ x=3 หรือไม่เพราะเหตุใด

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

7. ถ้า $f(x)=\begin{cases} 5-x & \text{เมื่อ } x<4 \\ 1 & \text{เมื่อ } x=4 \\ \frac{x}{4} & \text{เมื่อ } x>4 \end{cases}$

จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ x=4

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

8. ถ้า $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{เมื่อ } x\neq 1\\ m & \text{เมื่อ } x=1\end{cases}$

ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=1$ จงหาค่า $m$

9. ถ้า $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2-3x-10}$ แล้ว $x$ มีค่าเท่าใด จึงจะทำให้ฟังก์ชัน $g(x)$ ไม่ต่อเนื่อง

10. ถ้า $f(x)=\begin{cases} 1\cdot 9998 & \text{เมื่อ } x<0 \\ 2 & \text{เมื่อ } 0\le x<1 \\ 2x & \text{เมื่อ } x>1 \end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

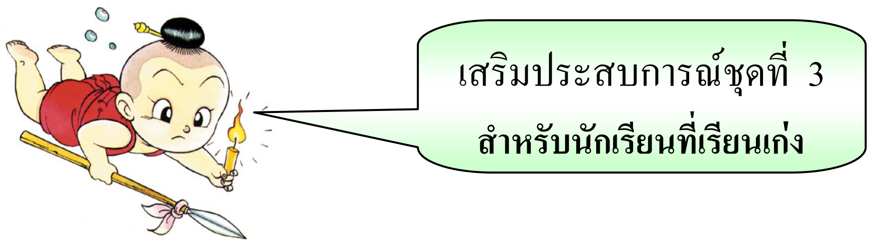
____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

**เฉลยเสริมประสบการณ์ชุดที่ 2 สำหรับนักเรียนที่เรียนปานกลาง**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) 0 , 0 , 0 , 0 | 2) $\frac{4}{3}$ | 3) $-\frac{1}{6}$ | 4) 3 |
| 5) ไม่มีลิมิต | 6) ไม่ต่อเนื่อง | 7) | 8) 2 |
| 9) -2 , 5 | 10) ไม่มีลิมิต | | |




1. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3}$ (ข้อสอบแข่งขันสมาคมคณิตศาสตร์ ปี 2539)

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} + \lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt{y^2+1}-y)$ มีค่าเป็นอย่างไร
(ข้อสอบแข่งขันสมาคมคณิตศาสตร์ ปี 2529)

3. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - (x+1)}{e^{x+1}}$ (ข้อสอบแข่งขันสมาคมคณิตศาสตร์ ปี 2530)

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

4. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} \left( \frac{x^{2}}{x-1} + \frac{1}{x^{2} - 3x + 2} \right)$(ข้อสอบแข่งขันสมาคมคณิตศาสตร์ ปี 2538)

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

5. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to -2^{2-}} \dfrac{|x^2 - 4| + |x + 2|}{x^2 - 3x - 10}$ (ข้อสอบแข่งขันสมาคมคณิตศาสตร์ ปี 2538)

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

6. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{10 - x} - 2\sqrt[3]{3 - x}}{x - 2}$ (ข้อสอบแข่งขันสมาคมคณิตศาสตร์ ปี 2533)

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

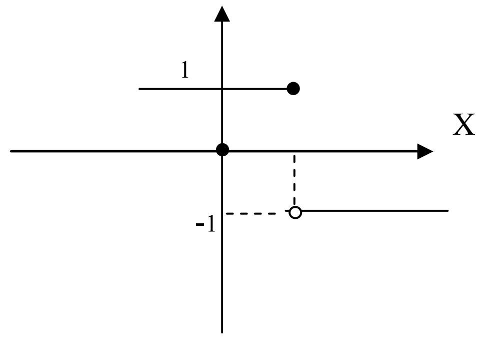
**<u>เฉลยเสริมประสบการณ์ชุดที่ 3 สำหรับนักเรียนที่เรียนเก่ง</u>**

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $0$ 4) $1$ 5) $\frac{5}{7}$ 6) $\frac{7}{12}$

## บันทึกความรู้เพิ่มเติม

# แบบทดสอบย่อย ชุดที่ 4

1. จงพิจารณา $f(x)$ จากกราฟ $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่




2. จงพิจาณา $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ มีความต่อเนื่องที่ $x = 5$ หรือไม่

3. จงพิจาณา $f(x)=\begin{cases} x^2+1 , x\neq 3 \\ 2x+4 , x=3 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ $x=3$ หรือไม่

4. จงพิจาณา $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-36}{x-6} , x>6 \\ \dfrac{x+4}{2}+7 , x\leq 6 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ $x=6$ หรือไม่

5. จงพิจาณา $f(x)=\begin{cases} 3x+1 , x>1 \\ 2x+2 , x=1 \\ 4x-1 , x<1 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ $x=1$ หรือไม่

## ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กล่าวมาแล้ว เป็นการพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด ๆ หนึ่ง โดยทั่วไปสามารถหาความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วงเปิดและช่วงปิดได้เช่นกันแต่การพิจารณาฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วงเปิดหรือปิดนี้ จะต้องพิจารณาการต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดในช่วงนั้น ซึ่งจะทำให้เป็นเรื่องที่ยุ่งยากเกินกว่าที่จะเรียนในชั้นนี้ แต่เป็นเรื่องที่ต้องนำไปใช้ในการหาอนุพันธ์และการหาปริพันธ์ต่อไป ในชั้นนี้จึงศึกษาเฉพาะฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งฟังก์ชันทั้งสองนี้ต่อเนื่องในโดเมนของแต่ละฟังก์ชันเท่านั้น

**บทนิยาม** ฟังก์ชันพหุนาม (Palynomial function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ โดยที่ $a_n,a_{n-1},\ldots,a_2,a_1,a_0$ เป็นค่าคงตัว และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

เช่น $f(x) = x^3+3x^2-x+2$

$f(x) = x^4+x^2-x+4$

$f(x) = x^2-2x-1$

$f(x) = x^3$ เป็นต้น

**ทฤษฎีบท** ฟังก์ชันพหุนามเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เช่น $f(x) = x^5+x^3-x-3$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เช่น $f(x) = x^3+1$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

**บทนิยาม** ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p(x) และ q(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม เมื่อ $q(x) \neq 0$

เช่น $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$

$f(x) = \dfrac{x^2-x-20}{x+4}$

$f(x) = \dfrac{x+3}{x}$ เป็นต้น

**ทฤษฎีบท** ฟังก์ชันตรรกยะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x=a
เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $q(a) \neq 0$

เช่น $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$

เป็น**ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่ x = 3** เพราะว่า $f(3) = \dfrac{3+3}{3-3}$ หาค่าไม่ได้

เช่น $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-x-30}$

**เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่ x = -5 และ x = 6** เพราะว่า

$x^2-x-30 = (x-6)(x+5) = 0$

แสดงว่า x = -5, 6 ทำให้ $x^2-x-30 = 0$

นั่นคือ $f(-5) = \dfrac{-5+5}{(-5)^2-(-5)-30}$ **หาค่าไม่ได้**

และ $f(6) = \dfrac{6+5}{(6)^2-(6)-30}$ **หาค่าไม่ได้**

การหาความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วงเปิด และช่วงปิดสามารถดำเนินการได้ตามบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม** (1) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุก ๆ จุด ในช่วง (a, b)

(2) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] ก็ต่อเมื่อ

2.1 f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด ในช่วง (a, b) และ

2.2 $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ และ $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

**ตัวอย่าง** ให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & , \ 4 < x \le 7 \\ 8 & , \ x = 4 \end{cases}$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [4, 7]

**วิธีทำ**

(1) ต้องแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุก ๆ จุด **บนช่วงเปิด (4, 7)**

**วิธีแสดง** ถ้าให้ **$a \in (4, 7)$** จะได้

1.1 $f(a) = \dfrac{a^2 - 16}{a - 4} = \dfrac{(a-4)(a+4)}{a-4} = $ **a+4** $(\therefore \ a \neq 4)$

1.2 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left( \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} \right) = \lim_{x \to a} (x + 4) = a + 4$

1.3 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

แสดงว่า **f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุก ๆ จุดบนช่วง (4, 7)**

(2) ต้องแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$

**วิธีแสดง** 2.1 f(4) = 8

2.2 $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \left( \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} \right) = \lim\limits_{x \to 4^+} (x + 4) = 4 + 4 = 8$

แสดงว่า $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$

(3) ต้องแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = f(7)$

**วิธีแสดง** 3.1 f(7) = $\dfrac{7^2 - 16}{7 - 4} = \dfrac{33}{3} = 11$

3.2 $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 7^-} \left( \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} \right) = 11$

แสดงว่า $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = f(7)$

ดังนั้น **f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [4, 7]**

## แบบฝึกหัดที่ 7

1. ให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & 3 < x \le 5 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [3, 5]

________________________________________________________

________________________________________________________

________________________________________________________

________________________________________________________

________________________________________________________

________________________________________________________

2. ให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง [-1, 1] หรือไม่ จงแสดง

________________________________________________________

________________________________________________________

________________________________________________________

________________________________________________________

________________________________________________________

________________________________________________________

3. ให้ $f(x) = x^4-2x+3$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [-2, 2] หรือไม่ จงแสดง

# แบบทดสอบย่อย ชุดที่ 5

1. ถ้า $f(x)=\begin{cases} 2x+3\ , \ x\neq 1 \\ 3k-1\ , \ x=1 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ $x=1$ แล้วจงหาค่าของ $k+1$

2. ถ้า $f(x)=\begin{cases} x^2-6\ , \ x>k \\ x \qquad , \ x\leq k \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ $x=k$ ซึ่ง $k\in(-2,3]$ แล้วจงหา $k^2+1$

3. ถ้า $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4}\ , \ x<4 \\ 2k \qquad , \ x\geq 4 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ $x=4$ แล้วค่าของ $(k+1)$ มีค่ามากกว่า $k-1$ อยู่เท่าใด

4. ถ้า $f(x)=\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$ แล้ว จงหาค่า $x$ ที่ทำให้ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง

5. ถ้า $f(x)=\begin{cases} x+2 \ , \ x \geq 1 \\ 3k \quad , \ x < 1 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ $x=1$ แล้ว จงหาค่า $\lim\limits_{x \to k^-} \sqrt{1-x}$

# แบบฝึกหัดทบทวน

1. ให้ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & ,0\le x<1\\ 1 & ,1\le x<2\\ 2 & ,x=2\end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

2. ถ้า $f(x)=\dfrac{x^2}{3+x}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

3. ถ้า $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

4. ถ้า $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

5. ถ้า $g(x)=\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

6. ถ้า $f(x)=\dfrac{x^2-49}{x+7}$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = -7 หรือไม่ จงแสดง

______________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

7. ถ้า $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 1 หรือไม่ จงแสดง

______________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

8. ถ้า $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-35}$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องเมื่อ x มีค่าเท่าใด

______________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

9. ถ้า $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x}$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องเมื่อ x มีค่าเท่าใด

10. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 3mx - 7 & , \ x \neq 2 \\ 5 & , \ x = 2 \end{cases}$

แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ ค่าของ x จงหาค่า m

11. ถ้า $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{(x+3)^3} & , \quad x \neq -3 \\ 0 & , \quad x=-3 \end{cases}$

แล้ว f(x) ต่อเนื่องที่ x = -3 หรือไม่ จงแสดง

12. ถ้า $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \quad x \neq 5 \\ a+1 & , \quad x=5 \end{cases}$

จงหาค่า a ที่ทำให้ f(x) ต่อเนื่องที่ x = 5

13. ให้ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{2x} & \text{เมื่อ} \quad x \neq 0 \\ k & \text{เมื่อ} \quad x = 0 \end{cases}$

ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ x = 0 จงหาค่าของ k

____________________________________________________________

14. ให้ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{x^2-9} & , \quad x > 3 \\ m & , \quad x = 3 \\ 3x+n & , \quad x < 3 \end{cases}$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ x = 3 จงหาค่าของ m-n

15. ถ้า $f(x) = x^2-5x+2$ แล้ว f ต่อเนื่องบนช่วง [0, 3] หรือไม่

____________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________